非決定性オートマトンと非決定性動的計画法について (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)

丸山, 幸宏

数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 146-152

非決定性オートマトンと非決定性動的計画法について

長崎大学・経済学部　　丸山　幸宏（Yukihiro Maruyama）
Faculty of Economics, Nagasaki University

1　はじめに

オートマトン理論を用いて, Karp and Held [4] は, 一般の離散最適化問題を記述できる離散的決定過程（ddp）と逐次決定過程（sdp）の部分クラスである単調逐次決定過程（msdp） の関係を明らかにした。ここで, 逐次決定過程（sdp）は離散的決定過程（ddp）に状態空間を導入したものであり, コスト関数をもつ有限オートマトンである。また単調逐次決定過程（msdp）は, 逐次決定過程（sdp）のうち単調性をみたすコスト関数をもつクラスで, Bellman の動的計画法における関数方程式が成り立つような一般モデルである。さらに Ibaraki [1] は msdp の部分クラスである強単調逐次決定過程（smsdp）およびその部分クラスの加法型過程（ap）が与えられた離散的決定過程（ddp）を強表現するための必要十分条件（強表現定理）を与えた。その上，Ibaraki [2] は sdp の拡張クラスである非決定性逐次決定過程（nd-sdp）を導入し，sdp の識別機械としての性質を調べている。ただし，nd-sdp は非決定性有限オートマトン上で定義されたクラスであるが, それに対する強表現定理については述べられていない。

本論文では, 非決定性離散的決定過程（nd-ddp), および Ibaraki[2] の定義とは異なる非決定性逐次決定過程（nd-sdp）を導入し，両過程の関係を明らかにする。すなわち非決定性逐次決定過程（nd-sdp）が非決定性離散的決定過程（nd-ddp）を強表現するための必要十分条件を与える。第 2 節において, 非決定性動的計画法（Lew[3]）における再帰式が成立する非決定性単調逐次決定過程 (nd-msdp) をはじめ，様々な型の非決定性逐次決定過程（nd-smsdp, nd-pmsdp, nd-lmsdp, nd-assdp）を定義する。第 3 節で, 与えられた nd-ddp と同じ最適方策の集合をもつような nd-sdp が存在するための必要十分条件 (強表現定理) を与える。

2　定義

非決定性離散的決定過程（nd-ddp）は次の 4 文字で定義される： $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \mathrm{Opt}_1)$, ただし, $\mathrm{Opt}_1 = \min$ あるいは max であり,

Σ : 有限個のアルファベットの集合 (決定の有限集合);

Σ^* : 決定を有限個連接して得られる方策の集合;

$\Sigma^* \ni \epsilon$: 長さ 0 の方策; $\Sigma^* \supset S$: 許容方策の集合;

$f : S \longrightarrow R^1$: コスト関数で最小化あるいは最大化することが目的

$f(x) = \mathrm{Opt}_2 f_{A(x)}(x) = \mathrm{Opt}_2\{f_i(x) \mid i \in A(x)\} \Longrightarrow \mathrm{Opt}_1$,

$\mathrm{Opt}_2 = \min$ or Max

$A(x = a_1 \cdots a_n) \ni i = i_1 \cdots i_n$: 添え字の集合, 但し次を満たす：

$A(x) = A(y) \Longrightarrow A(xz) = A(yz), \forall z \in \Sigma^*$

である。

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F)$ とは

Q : 状態の有限集合; $Q \ni q_0$: 初期状態;

$ST \subset Q \times Q \times \Sigma, (q, r, a) \in ST$; $Q \supset Q_F$: 最終状態の集合

のことである。$(q, r, a) \in ST$ は状態 q で、決定 a がなされたとき, 複数の状態 r への遷移が許されることを示すことに注意する。

さらに, 非決定性逐次決定過程（nd-sdp）は非決定性有限オートマトン (nd-fa) に目的関数を随伴させたシステムであり, 次のように定義される： $\Pi_{\mathrm{Opt}_1} = (M, h, \xi_0, \mathrm{Opt}_1)$, ただし,

$M = (Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F)$: 非決定性有限オートマトン;

$h : R^1 \times ST$: Π のコスト関数,

$h(\xi, q, r, a)$:$(q, r, a) \in ST$ に対する状態遷移後のコスト値

$R^1 \ni \xi_0$: 初期状態 q_0 における初期コスト

$\mathrm{Opt}_2\ \bar{h}_{q_0;Y(q_0,x)}(x) = \mathrm{Opt}_2\{\bar{h}_{q_0;\sigma}(x) \mid \sigma \in Y(q_0, x), \pi(\sigma) \in Q_F\} \Longrightarrow \mathrm{Opt}_1$,

ただし, $\mathrm{Opt}_1, \mathrm{Opt}_2 = \min$ or Max, であり, $x = a_1 a_2 \cdots a_k$, に対して

$Y(q_0, x) = \{r_1 r_2 \ldots r_k \mid (q_0, r_1, a_1) \in ST,$

$(r_1, r_2, a_2) \in ST, \ldots (r_{k-1}, r_k, a_k) \in ST\}$:遷移経路の集合,

$\bar{h}_{q_0;\mu}(\epsilon) = \xi_{q_0}$, μは長さ 0 の経路,

$\bar{h}_{q_0;\sigma r}(xa) = h(\bar{h}_{q_0;\sigma}(x), \pi(\sigma), r, a)$, $\sigma \in Y(q_0, x), (\pi(\sigma), r, a) \in ST$ $(\sigma r \in Y(q_0, xa))$,

ただし, $\pi(\sigma)$:状態経路 σ の最後の状態,

である。 ここでオートマトン M が最終状態の一つに遷移するとき, M は x を受理するといい, M の受理集合 $\{x \in \Sigma^* | \exists \sigma \in Y(q_0, x)$ s.t. $\pi(\sigma) \in Q_F\}$ を $F(M)$ と表す。また, nd-sdp Π の受理集合 $F(\Pi_{\mathrm{Opt}_1})$ は, 基礎となるオートマトン M の受理集合と同一のものとする（$F(\Pi_{\mathrm{Opt}_1}) = F(M)$）。

さらにコスト関数 h が単調性：

$$\xi_1 \le \xi_2 \Longrightarrow h(\xi_1, q, r, a) \le h(\xi_2, q, r, a) \quad \text{for } \forall(q, r, a) \in ST$$

を満たすとき，非決定性単調逐次決定過程 (**nd-msdp**) と呼び，h が強単調性：

$$\xi_1 < \xi_2 \Longrightarrow h(\xi_1, q, r, a) < h(\xi_2, q, r, a) \quad \text{for } \forall(q, r, a) \in ST$$

を満たすとき，非決定性強単調逐次決定過程 (**nd-smsdp**) と呼ぶ。また，

$$h(\xi_1, q, r, a) \ge \xi \quad \text{for } \forall\xi \in R^1, \forall(q, r, a) \in ST$$

を満たす Π を非決定性正単調逐次決定過程 (**nd-pmsdp**) と呼び，$|F(\Pi_{\mathrm{Opt}_1})| < \infty$ ($F(\Pi_{\mathrm{Opt}_1})$: 有限集合) を満たす Π を非決定性ループフリー単調逐次決定過程 (**nd-lmsdp**) と呼ぶ。非決定性逐次過程および上述したその部分クラスは，定義において若干の相違はあるものの，Ibaraki [2] により導入された逐次決定過程である。

非決定性単調逐次決定過程 (**nd-msdp**) に対しては，

$$\begin{aligned}
G_{k+1}(q) = \min_{x=a_1\cdots a_k a_{k+1}} \Big\{&\mathrm{Max}[\bar{h}_{q_0;\sigma r}(x' a_{k+1}) \mid \sigma \in Y(q_0; x'), \\
&\sigma r \in Y(q_0; x' a_{k+1}), \pi(\sigma r) = q\Big\}, \\
G_k(p) = \min_{x=a_1\cdots a_k} \Big\{&\mathrm{Max}[\bar{h}_{q_0;\sigma}(x) \mid \sigma \in Y(q_0; x), \pi(\sigma) = p\Big\},
\end{aligned}$$

と定義すると，次のような，非決定性動的計画法（[3] 参照）における再帰式が成立する：

$$\begin{aligned}
G_{k+1}(q) &= \min_{p,a_{k+1}} \{\mathrm{Max}[h(G_k(p), p, q', a_{k+1})] | (p, q', a_{k+1}) \in ST\} \\
&= \min_{p,a_{k+1}} \{h(G_k(p), p, q, a_{k+1}) | (p, q, a_{k+1}) \in ST\}, \\
G_{k+1}(q_0) &= \min[\xi_0, \min_{p,a_{k+1}} \{\mathrm{Max}[h(G_k(p), p, q', a_{k+1})] | (p, q', a_{k+1}) \in ST\}] \\
&= \min[\xi_0, \min_{p,a_{k+1}} \{h(G_k(p), p, q_0, a_{k+1}) | (p, q_0, a_{k+1}) \in ST\}].
\end{aligned}$$

また，非決定性強単調逐次決定過程 (**nd-smsdp**) の部分クラスとして次の非決定性結合型逐次決定過程（nd-assdp）を導入する。

定義 1 コスト関数が $h(\xi, q, a) = \xi \circ \psi(q, r, a)$ により定義された非決定性逐次決定過程（nd-sdp）を非決定性結合型逐次決定過程（nd-assdp）と呼ぶ。ただし，$\circ$ は 2 項演算で次の性質を満たすものとする：

(i) $(A, \circ)$ は半群 ：$\circ : A \times A \longrightarrow A$,（結合法則）$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

(ii) 単位元 $\exists e(\circ) \in A$ の存在： $a \circ e(\circ) = e(\circ) \circ a = a \quad \forall\, a \in A$;

(iii) 各 $a \in A$ に対して逆元 $\exists a^{-1}$ の存在： $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e(\circ)$;

(iv) 交換法則: $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in A$;

(v) 強単調: $a_1,\ a_2 \in A,\ a_1 < a_2 \Longrightarrow\ a \circ a_1 < a \circ a_2$

例 1 加法過程 (ap): $\circ = +,\ A = R^1,\ e(\circ) = 0,\ a^{-1} = -a\ \ (\ a \in R^1)$.

例 2 乗法型過程 (mp): $\circ = \times,\ A = \{a \mid a > 0\},\ e(\circ) = 1,\ a^{-1} = 1/a\ (\ a \neq 0\ )$.

例 3 乗加法型過程 (map): $a \circ b = a + b - ab,\quad A = \{a \mid a < 1\},\ e(\circ) = 0,$
$a^{-1} = \frac{a}{(a-1)}\ (\ a \neq 1\ )$.

例 4 分数型過程 (fp): $a \circ b = \dfrac{a+b}{1+ab},\quad A = (-1, 1),\ e(\circ) = 0,\ a^{-1} = -a(\ a \in (-1, 1)\ )$.

非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) $\Pi_{\mathrm{Opt}_1} = (M,\ h, \xi_0, \mathrm{Opt}_1)$ が非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon_{\mathrm{Opt}_1} = (\Sigma, S, f, \mathrm{Opt}_1),\ f(x) = \mathrm{Opt}_2 f_{A(x)}(x)$ を強表現するとは,

$$F(\Pi_{\mathrm{Opt}_1}) = \{x | \exists \sigma \in Y(q_0, x), \mathrm{s.t.} \pi(\sigma) \in Q_F\} = S,$$
$$\bar{h}_{q_0;Y(q_0;x)}(x) = f_{A(x)}(x) \quad \forall x \in S,$$

が成立することである。ただし

$$\bar{h}_{q_0;Y(q_0;x)}(x) = \{\bar{h}_{q_0;\sigma}(x) \mid \sigma \in Y(q_0; x)\},\ f_{A(x)}(x) = \ \{f_i(x) \mid i \in A(x)\},$$

である。

非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) Π_{Opt_1} が非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon_{\mathrm{Opt}_1} = (\Sigma, S, f, \mathrm{Opt}_1),\ f(x) = \mathrm{Opt}_2 f_{A(x)}(x)$ を強表現するときは,

$$\mathrm{Opt}_2 \bar{h}_{q_0;Y(q_0;x)}(x) = \mathrm{Opt}_2 f_{A(x)}(x) \quad \forall x \in S,$$
$$\mathrm{Opt}_1\{\mathrm{Opt}_2 \bar{h}_{q_0;Y(q_0;x)}(x) \mid x \in F(\Pi_{\mathrm{Opt}_1})\} = \mathrm{Opt}_1\{\mathrm{Opt}_2 f_{A(x)}(x) \mid x \in S\},$$

が成立することに注意する。

3 nd-ddp の nd-sdp による強表現

本節において主要結果を述べる。まず, 強表現定理において主要な役割を担う同値関係を定義する：

定義 2 (同値関係) nd-ddp $\Upsilon_{\mathrm{Opt}_1} = (\Sigma, S, f, \mathrm{Opt}_1),\ f(x) = \mathrm{Opt}_2\{f_i(x) \mid i \in A(x)\}$ において, Σ^* 上の 2 項関係を次で定義する：

$$\begin{aligned} xR_S y &\iff \{z \mid xz \in S\} = \{z \mid yz \in S\} \\ xR_{\Upsilon_{f_i}} y &\iff xR_s y \wedge (f_{ij}(xz) = f_{ij}(yz)\ \forall ij \in A(xz) = A(yz),\ \forall xz \in S), \\ &\quad \text{ただし}, i \in A(x) = A(y). \end{aligned}$$

また，右不変:$xRy \Longrightarrow xzRyz\ \forall z \in \Sigma^*$，かつ集合 S を細分:$xRy \Longrightarrow (x \in S \Longleftrightarrow y \in S)$ する同値関係の全体を $\Lambda(S)$ と表すと， R_S, $R_{\Upsilon_{f_i}} \in \Lambda(S)$ が成り立つことに注意する。さらに

$$\Lambda_F(S) = \{R \in \Lambda(S) \mid |\Sigma^*/R| < \infty\}$$

と定義する。また，$\Lambda(\Sigma^*)$, $\Lambda_F(\Sigma^*)$ は右不変同値関係の全体，指数有限右不変同値関係の全体を表す。

このとき，次のような, nd-sdp によりある関数 h' を実現するための補題が成立する：

補題（nd-sdp による h' の実現）

各方策 $x \in \Sigma^*$ に対して、集合 $A(x)$ が対応しているとする。ただし、$A(x) \subset A^n$, $|A| < \infty$ である。また各 $x \in \Sigma^*$ および各 $i \in A(x)$ に対して実数値 $h'_i(x)$ が与えられている。 (すなわち $h'_{A(\cdot)}(\cdot) : \Sigma^* \longrightarrow 2^R$; 集合値関数)。 この $A(x), h'_i(x)$ に対して 2 項関係 $R_{h'}$ を

$$xR_{h'}y \iff A(x) = A(y) \wedge h'_i(x) = h'_i(y), \quad \forall i \in A(x),$$

と定義する。このとき,

$$\bar{h}_{q_0;Y(q_0;x)}(x) = h'_{A(x)}(x), \quad \forall x \in \Sigma^*, \tag{1}$$

を満たす nd-sdp $\Pi_{\mathrm{Opt}_1} = (M, h, \xi_0, \mathrm{Opt}_1)$ が存在するための必要十分条件は $T \wedge R_{h'} \in \Lambda(\Sigma^*)$ を満たす $T \in \Lambda_F(\Sigma^*)$ が存在することである。ただし，等式 (1) は次の意味で成立する：

$$\begin{aligned} &\forall \rho \in Y(q_0; x), \exists_1 i \in A(x) \text{ s.t. } \bar{h}_{q_0;\rho}(x) = h'_i(x) \\ &\forall i \in A(x), \exists_1 \rho \in Y(q_0; x) \text{ s.t. } h'_i(x) = \bar{h}_{q_0;\rho}(x) \end{aligned}$$

すなわち, 対応：$\rho \in Y(q_0; x) \Rightarrow i \in A(x)$ は全単射である。

この補題より，次の nd-sdp による強表現定理が導出される：

定理（**nd-sdp** の強表現定理）

非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon_{\mathrm{Opt}_1} = (\Sigma, S, f, \mathrm{Opt}_1)$ が，非決定性逐次決定過程 nd-sdp $\Pi_{\mathrm{Opt}_1} = (M, h, \xi_0, \mathrm{Opt}_1)$ により強表現されるための必要十分条件は

$$(\forall x, y \in S)(x(T \wedge R_{f_i})y \implies xR_{\Upsilon_{f_i}}y) \tag{2}$$

を満たす $T \in \Lambda_F(S)$ が存在することである。

ただし，$xR_{f_i}y \iff A(x) = A(y) \wedge f_i(x) = f_i(y) \ \ \forall i \in A(x)$ である。

例　非決定性結合型最短経路問題を考える。この問題はまず非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon_{\min} = (\Sigma, S, f, \min)$, $\Sigma = \{1, 2, \ldots, N\} \ni j$: 次に j に移動, $S = \{x \in \Sigma^* | x = yN,\ y \in \Sigma^*\}, A(x = j_1 j_2 \cdots j_k) = \{i \mid i = i_1 i_2 \cdots i_k,\ i_1 \in T_{1j_1}, i_2 \in T_{j_1 j_2}, \ldots, i_k \in T_{j_{k-1} j_k}\}$, $T_{ij} = \{t_{ij}^1, t_{ij}^2, \ldots, t_{ij}^l\}$, $f_i(x = j_1 j_2 \cdots j_k) = i_1 \circ i_2 \circ \cdots \circ i_k,\ \ i \in A(x)$, $f(x = j_1 j_2 \cdots j_k N) = \mathrm{Max}\{f_i(x) \mid i \in A(x)\} = \mathrm{Max}\ f_{A(x)}(x) \Longrightarrow$ minimize に定式化できることに注意する（図 1 参照）。

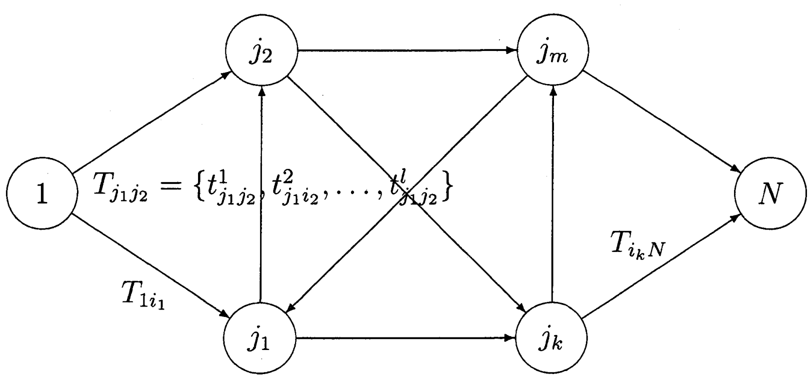

図 1: 非決定性結合型最短経路問題（非決定性離散的決定過程 $\Upsilon_{\min}$）

これに対して，同値関係 T を，

$$xTy \iff x = j_1 j_2 \cdots j,\ y = j_1' j_2' \cdots j$$

と定義すると，$T \in \Lambda_F(S)$ が成り立ち，さらに強表現定理の仮定 (2) を満たす。従って，同定理より，$\Upsilon_{\min}$ を強表現する非決定性逐次決定過程が存在することがわかるが，次に

述べる **nd-sdp** $\Pi_{min} = (M(Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F), h, \xi_0, \min)$ が強表現している：

$$Q = \{(q_1, \mu), (q_2, i_1), \ldots, (q_N, i_N) \mid q_i : \text{node},\ i_1, i_2, \ldots, i_N \in A\}$$
$$q_1 :\ \text{initial node},\ \ Q_F = \{(q_N, i_N) | i_N \in A\}$$
$$h(\xi, (q_k, i), (q_l, j), l) = \xi \circ j, \quad j \in T_{kl},$$
$$\xi_0 = e(\circ)\text{:単位元, ただし，} \circ : A \times A \longrightarrow A\text{; 結合法則を満たす 2 項演算。}$$

実際，$x = j_1 j_2 \ldots j_k N \in\ S$ に対して

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{q_0;\mu r_1}(j_1) &= h(\xi_0, q_0, (j_1, i_1), j_1) = \xi_0 \circ i_1 = e(\circ) \circ i_1 \\
\bar{h}_{q_0;\mu r_1 r_2}(j_1 j_2) &= h(\bar{h}_{q_0;\mu r_1}(j_1), (j_1, i_1), (j_2, i_2), j_2) \\
&= \bar{h}_{q_0;\mu r_1}(j_1) \circ i_2 = e(\circ) \circ i_1 \circ i_2 \\
&\ldots \\
\bar{h}_{q_0;\mu r_1 r_2 \ldots r_k r_{k+1}}(j_1 j_2 \ldots j_k N) &= \bar{h}_{q_0;\mu r_1 r_2 \ldots r_k}(j_1 j_2 \ldots j_k) \circ i_N \\
&= i_1 \circ i_2 \circ \cdots \circ i_k \circ i_N = f_i(x = j_1 j_2 \cdots j_k N)
\end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\bar{h}_{q_0;Y(q_0,x)}(x) = f_{A(x)}(x), \quad x \in S$$

となることがわかる。またこの Π_{min} は，非決定性結合型逐次決定過程（nd-assdp）でもある。

参考文献

[1] Ibaraki, T. (1972), Representation theorems for equivalent optimization problems, *Information and Control* **21**, 397-435.

[2] Ibaraki, T. (1978), Finite automata having cost functions: Nondeterministic models, *Information and Control* **37**, 40-69.

[3] Lew, A. (2001), Nondeterministic dynamic programming on a parallel coprocessing system, *Applied Math. Comp.* **120**, 139-147.

[4] Karp, R. M. and Held, M. (1967), Finite-state processes and dynamic programming, *SIAM J. Appl. Math.* **15**, 693-718.